Posons alors les transformations du vecteur état et du vecteur commande telles que :

$$\hat{x}_k = r^{-k} x_k \quad \text{ou bien} \quad x_k = r^k \hat{x}_k \tag{50}$$

$$\hat{u}_k = r^{-k} u_k \quad \text{ou bien} \quad u_k = r^k \hat{u}_k \tag{51}$$

et sachant qu'a l'indice k+1 on a :

$$x_{k+1} = r^{k+1} \hat{x}_{k+1}$$

$$\hat{x}_{k+1} = (1/r^{k+1}) x_{k+1} \tag{52}$$

le système discret (48) devient :

$$\hat{x}_{k+1} = \frac{A}{r} \hat{x}_k + \frac{B}{r} \hat{u}_k \tag{53}$$

et par alors le critère modifié J_r (49) se transforme en un critère classique de type (24) tel que :

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\hat{x}_k^T Q \hat{x}_k + \hat{u}_k^T R \hat{u}_k \right] \tag{54}$$

à horizon infini dont la minimisation donne une commande de type :

$$\hat{u}_k(\hat{x}_k) = -(R + \frac{B^T}{r} P \frac{B}{r})^{-1} \frac{B^T}{r} P \frac{A}{r} \hat{x}_k \tag{55}$$

avec le gain P solution vers laquelle converge la suite :

$$P_1 = Q + \frac{A^T}{r} P_{k+1} \frac{A}{r} - \frac{A^T}{r} P_{k+1} \frac{B}{r} (R + \frac{B^T}{r} P_{k+1} \frac{B}{r})^{-1} \frac{B^T}{r} P_{k+1} \frac{A}{r} \tag{56}$$

on a :

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{A}_f \hat{x}_k \tag{57-a}$$

$$\hat{A}f = \frac{A}{r} - \frac{B}{r} (R + \frac{B^T}{r} P \frac{B}{r})^{-1} \frac{B^T}{r} P \frac{A}{r} \tag{57-b}$$

qui suite aux relations (52) conduit à :

$$x_{k+1} = \underbrace{(r\hat{A}_f)}_{A_f} x_k \tag{58}$$

Sachant la stabilité du système (53...56), l'état « x_k » tend vers Zéro aussi vite que « r^k » . En d'autres termes, tous les pôles du système discret en boucle fermée seront à l'intérieur du cercle de rayon « r » centré à l'origine.

Exemple illustratif :

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.2 & 2.3 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} u_k$$

avec un critère J classique ayant $Q=I_2$ et $R=1$ alors les pôles optimaux sont :

$$\sigma_1 = 0.776 \quad \text{et} \quad \sigma_2 = 0.341$$

Si l'on considère un critère de type J_r avec un réel $r=0.3$ on a le gain de Riccati :

$$P = \begin{bmatrix} 431.4 & -65.9 \\ -65.9 & 16.4 \end{bmatrix}$$

la matrice caractéristique en boucle fermée modifiée :

$$\hat{A}_f = \begin{bmatrix} -0.841 & 0.146 \\ -7.682 & 1.292 \end{bmatrix}$$

la matrice caractéristique en boucle fermée robuste:

$$A_f = r\hat{A}_f = \begin{bmatrix} -0.252 & 0.044 \\ -2.305 & 0.387 \end{bmatrix}$$

dont les valeurs propres de A_f sont les pôles optimaux en boucle fermée avec un degré de stabilité seront :

$$\sigma_1 = 0.031 \quad \text{et} \quad \sigma_2 = 0.104$$

qui sont évidemment à l'intérieur du cercle de rayon $r=0.3$ comme c'est déjà prévu.

Scanné avec CamScanner

déterminer et afficher la pulsation de résonance .

Commande optimale de systèmes à temps discret

Régulation d'état à horizon infini

L'équation d'état s'écrit sous cette forme : $X_{k+1} = AX_k + Bu_k$

Le critère à optimiser est le suivant : $J = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(X_k^T Q X_k + u_k^T R u_k\right)$

La commande optimale est obtenue en minimisant l'hamiltonien et en respectant les conditions aux limites:

$$u_k = \overline{G} u_k$$

$$\overline{G} = -\left(R + B^T \overline{P} B\right)^{-1} B^T \overline{P} A$$

Le gain de Riccati (constant) est obtenu à la convergence de la récurrence :

$$P_k = Q + A^T P_{k+1} A - A^T P_{k+1} B\left(R + B^T P_{k+1} B\right)^{-1} B^T P_{k+1} A$$

Commande optimale de systèmes à temps discret

Poursuite de sortie à horizon fini

La représentation d'état s'écrit sous cette forme : $\begin{cases} X_{k+1} = AX_k + Bu_k \\ y_k = CX_k \end{cases}$

Le critère à optimiser est le suivant :

$$J = \frac{1}{2}\varepsilon_N^T F \varepsilon_N + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\varepsilon_k^T Q \varepsilon_k + u_k^T R u_k\right)$$

$$\varepsilon = z_k - y_k = z_k - CX_k$$

Hamiltonien

$$H = \frac{1}{2}\varepsilon_k^T Q \varepsilon_k + \frac{1}{2} u_k{}^T R u_k + \lambda_{k+1}^T\left(AX_k + Bu_k\right)$$

Vecteur d'état adjoint $\lambda_k = P_k X_k + q_k$

Commande optimale de systèmes à temps discret

La commande optimale est :

$$u_k = G_k u_k + F_k q_{k+1}$$

$$G_k = -\left(R + B^T P_{k+1} B\right)^{-1} B^T P_{k+1} A$$

Le gain de Riccati est obtenu par cette équation rétrograde :

$$P_k = Q + A^T P_{k+1} A - A^T P_{k+1} B\left(R + B^T P_{k+1} B\right)^{-1} B^T P_{k+1} A$$

Le vecteur auxiliaire qui assure la poursuite est obtenu par l'équation suivante :

$$q_k = -C^T Q z_k + A^T q_{k+1} - A^T P_{k+1}\left(I + RR^{-1} B^T P_{k+1}\right)^{-1} BR^{-1} B^T q_{k+1}$$

Problème de régulation avec degré de Stabilité.

Problème:

Soit à déterminer la séquence de commande u_k du processus discret décrit par l'équation récurrente :

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \qquad (48)$$

qui doit assurer un certain degré de stabilité ou de robustesse exprimé par la placement des pôles discrets non seulement à l'intérieur du disque de rayon l'unité centré à l'origine mais à l'intérieur d'un disque de rayon « r » inférieur à l'unité et centré à l'origine.

Cet objectif peut être réalisé par la considération de la minimisation d'un critère J_r de la forme modifiée suivante :

$$J_r = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} r^{-2k}\left(x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k\right) \quad \text{avec } 0 < r < 1 \qquad (49)$$

Scanné avec CamScanner

Le Problème de commande optimale avec robustesse de stabilité peut être résolu par la minimisation du critère J suivant :

$$J_\alpha = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{2\alpha t}(x^T Q x + u^T R u)dt$$

avec $\alpha > 0$ (51)

sous la contrainte du système étudié tel que:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (52)$$

Posons deux nouveaux vecteur état et vecteur commande tels que :

$$\bar{x}(t) = e^{\alpha t}x(t) \quad \text{et} \quad \bar{u}(t) = e^{\alpha t}u(t) \quad (53)$$

alors le problème posé devient un problème classique de régulation tel que :

$$J_\alpha = \frac{1}{2}\int_0^\infty (\bar{x}^T Q \bar{x} + \bar{u}^T R \bar{u})dt \quad (54)$$

sous la contrainte du système modifié tel que:

$$\dot{\bar{x}} = (A + \alpha I)\bar{x} + B\bar{u} \quad (55)$$

Le système optimal « provisoire » en boucle fermée sera alors :

$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}_f \bar{x}(t)$ avec $\bar{A}_f = (A + \alpha I - BR^{-1}B^T K_\alpha)$ (56)

avec K_α solution de l'équation de Riccati modifiée:

$$K_\alpha(A + \alpha I) + (A + \alpha I)^T K_\alpha - K_\alpha B R^{-1} B^T K_\alpha + Q = 0 \quad (57)$$

En utilisant la relation :

$$x(t) = e^{-\alpha t}\bar{x}(t). \quad (58)$$

on obtient la trajectoire optimale « robuste » recherchée :

$$\dot{x}(t) = A_f x(t)$$

avec $A_f = (A - BR^{-1}B^T K_\alpha)$ (59)

Par conséquent, l'état modifié $\bar{x}(t)$ tend asymptotiquement vers Zéro quant $t \to \infty$ (l'infini), et puisque l'état x(t) est tel que :

$$x(t) = e^{-\alpha t}\bar{x}(t) \quad (60)$$

alors x(t) tend vers Zéro aussi vite que $e^{-\alpha t}$, d'où le Degré de Stabilité α.

Exemple :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}u$$

le critère à minimiser est tel que $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $R = 1$.

le degré de stabilité à garantir est $\alpha = 3$.

Ce système est instable (ses pôles : -1 et 1) ,

Une commande optimale classique ($\alpha = 0$) conduit au système optimal stable tel que :

Le gain de Riccati est : $K = \begin{bmatrix} 38.5 & -15.3 \\ -15.3 & 6.4 \end{bmatrix}$

et on a $A_{f(\alpha=0)} = (A - BR^{-1}B^T K) = \begin{bmatrix} -5.96 & 1.41 \\ -12.92 & 2.83 \end{bmatrix}$

et les pôles optimaux sont : $\lambda = \{-0.54 \quad -2.58\}$

Alors qu'avec un degré de stabilité préspécifié $\alpha = 3$

On aura Le gain de Riccati est : $K_\alpha = \begin{bmatrix} 1278 & -591 \\ -591 & 274 \end{bmatrix}$

Avec $A_f = (A - BR^{-1}B^T K_\alpha) = \begin{bmatrix} -94 & 40 \\ -189 & 81 \end{bmatrix}$

et les pôles robustes sont $\lambda = \{-7.28 \quad -5.57\}$ avec $Re(\lambda) < -3$.

Commande optimale de systèmes à temps discret

- Régulation d'état à horizon fini

L'équation d'état s'écrit sous cette forme : $X_{k+1} = AX_k + Bu_k$

Le critère à optimiser est le suivant : $J = \frac{1}{2}X_N^T F X_N + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\left(X_k^T Q X_k + u_k^T R u_k\right)$

La commande optimale est obtenue en minimisant l'hamiltonien et en respectant les conditions aux limites:

$$H = \frac{1}{2}X_k^T Q X_k + \frac{1}{2}u_k^T R u_k + \lambda_{k+1}^T\left(AX_k + Bu_k\right) \qquad \lambda_k = P_k x_k$$

$$u_k = G_k u_k$$

Vecteur d'état adjoint

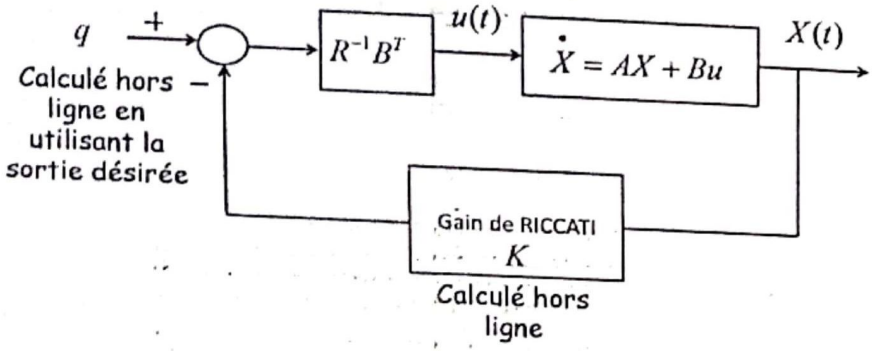
$$G_k = -\left(R + B^T P_{k+1} B\right)^{-1} B^T P_{k+1} A$$

Le gain de Riccati est obtenu par cette équation rétrograde : avec $P_N = F$

$$P_k = Q + A^T P_{k+1} A - A^T P_{k+1} B\left(R + B^T P_{k+1} B\right)^{-1} B^T P_{k+1} A$$

Scanné avec CamScanner

Schéma fonctionnel
Poursuite de sortie



- Régulation de sortie à horizon fini (perturbation inconnue)

La représentation d'état s'écrit sous cette forme :

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + Bu \\ y = CX \end{cases}$$

Le critère à optimiser est le suivant :

$$J = \frac{1}{2} y_f^T F y_f + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \left(y^T Q y + u^T R u \right) dt$$

La commande optimale est obtenue en minimisant l'hamiltonien :

$$H = \frac{1}{2} y^T Q y + \frac{1}{2} u^T R u + \Psi^T \dot{X}$$

$$= \frac{1}{2} X^T C^T Q C X + \frac{1}{2} u^T R u + \Psi^T \left(AX + Bu \right)$$

$\Psi(t) = K X(t)$

Vecteur d'état adjoint

La solution optimale est la loi de commande suivante :

$$u(t) = -R^{-1} B^T K X(t)$$

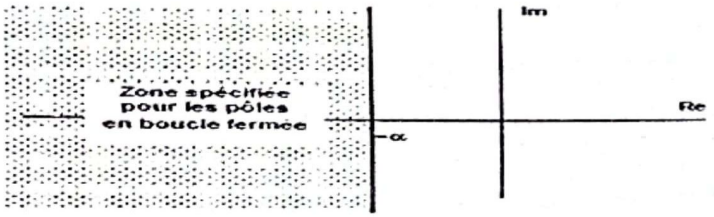
K est un gain solution de l'équation de RICCATI suivante :

$$\dot{K} + KA + A^T K - KBR^{-1}B^T K + C^T Q C = 0$$

avec $K(t_f) = K_f = C^T F C$

Problème de Régulation
avec un Dégré de Stabilité préspécifié

Dans le cas de la régulation (ou d'autres problèmes) le régulateur optimal conçu assure la stabilité du système étudié, sauf qu'il n'est pas possible de savoir la région où se trouvent les pôles (qui sont bien sûr stables) du système en boucle fermée . Il s'avère alors intéressant d'envisager des régions spécifiques du démi-plan complexe gauche telle que la région délimitée par la droite d'abscisse (- α) qui garantira un certain degré de stabilité ou bien robustesse de stabilité (une certaine « distance » de l'axe des imaginaires →limité de stabilité) .



Scanné avec CamScanner

K est un gain solution de l'équation de RICCATI suivante :

$$\dot{K} + KA + A^T K - KBR^{-1}B^T K + Q = 0$$

q est un vecteur de commande auxiliaire utilisé pour compenser l'effet des perturbations

$$\dot{q} + \left(A^T - KBR^{-1}B^T\right)q + Kv = 0$$

On peut déterminer q hors ligne (connaissant A, K, B, R et v).

avec $K(t_f) = K_f = F$ $\qquad q(t_f) = q_f = 0$

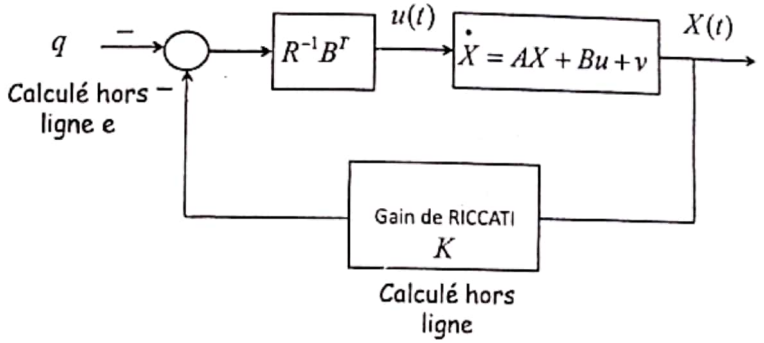
Pour un horizon fini : utiliser l'approximation d'Euler pour calculer K et q dans le sens rétrograde

Pour un horizon infini : $\dot{q} = 0$ **et** $\dot{K} = 0$

$$KA + A^T K - KBR^{-1}B^T K + Q = 0$$

$$\left(A^T - KBR^{-1}B^T\right)q + Kv = 0$$

Schéma fonctionnel
Régulation d'état : perturbation connue



● Poursuite de sortie à horizon fini

La représentation d'état s'écrit sous cette forme : $\begin{cases} \dot{X} = AX + Bu \\ y = CX \end{cases}$

Le critère à optimiser est le suivant :

$$J = \frac{1}{2}\varepsilon_f^T F \varepsilon_f + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left(\varepsilon^T Q\varepsilon + u^T Ru\right)dt$$

Les conditions d'optimalités sont :

$$\varepsilon = y_d - y = y_d - CX$$

$$\begin{cases} \dot{X} = H_\Psi = \dfrac{\partial H}{\partial \Psi} & \text{Hamiltonien} \\ H_u = 0 = \dfrac{\partial H}{\partial u} & H = \dfrac{1}{2}\varepsilon^T Q\varepsilon + \dfrac{1}{2}u^T Ru + \Psi^T\left(AX + Bu\right) \\ \dot{\Psi} = -H_X = -\dfrac{\partial H}{\partial X} & \text{Vecteur d'état adjoint} \\ & \Psi = KX(t) - q(t) \end{cases}$$

La solution optimale est la loi de commande suivante :

$$u(t) = -R^{-1}B^T K\,X(t) + R^{-1}B^T q(t)$$

K est un gain solution de l'équation de RICCATI suivante :

$$\dot{K} + KA + A^T K - KBR^{-1}B^T K + C^T QC = 0$$

q est un vecteur de commande auxiliaire utilisé pour assurer la poursuite de la sortie

$$\dot{q} + \left(A^T - KBR^{-1}B^T\right)q + C^T Qy_d = 0$$

$$K(t_f) = K_f = C^T FC$$

avec

$$q(t_f) = q_f = C^T Fy_d(t_f)$$

Scanné avec CamScanner

Remarque 1

A_f est la matrice caractéristique en boucle fermée

$$A_f = A - BR^{-1}B^T K$$

On montre que la boucle fermée avec la commande optimale est toujours stable.
Ceci reste vrai même si le système à commander est instable.

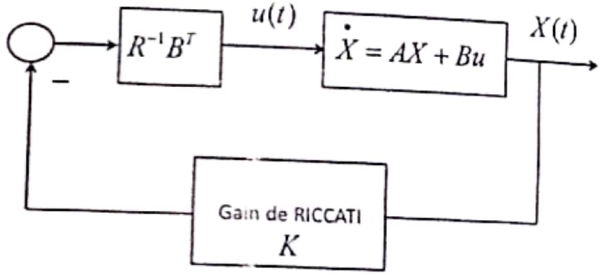
Remarque 2

Pour la commande à horizon infini
Si le système n'est pas commandable, le critère J est infini et n'admet pas de minimum.

Pour la commande à horizon fini

L'horizon est fini donc le critère J reste fini, D'où le problème de commandabilité ne se pose pas,

Schéma fonctionnel
Régulation d'état : perturbation inconnue



● Régulation d'état à horizon fini (avec perturbation connue)

L'équation d'état s'écrit sous cette forme :

$$\dot{X} = AX + Bu + v$$

Le critère à optimiser est le suivant :

$$J = \frac{1}{2}X_f^T F X_f + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left(X^T QX + u^T Ru\right)dt$$

La commande optimale est obtenue en minimisant l'hamiltonien :

$$H = \frac{1}{2}X^T QX + \frac{1}{2}u^T Ru + \Psi^T \dot{X}$$

$$= \frac{1}{2}X^T QX + \frac{1}{2}u^T Ru + \Psi^T\left(AX + Bu + v\right)$$

$$\Psi(t) = K\,X(t) + q(t)$$

Vecteur d'état adjoint

Les conditions d'optimalités sont :

$$H = \frac{1}{2}X^T QX + \frac{1}{2}u^T Ru + \Psi^T \dot{X}$$
$$= \frac{1}{2}X^T QX + \frac{1}{2}u^T Ru + \Psi^T(AX + Bu + v)$$
$$\Psi(t) = K\,X(t) + q(t)$$

$$\begin{cases} H_u = \dfrac{\partial H}{\partial u} = 0 \\ \dot{\Psi} = -\dfrac{\partial H}{\partial X} = -H_X \\ \dot{X} = H_\Psi = \dfrac{\partial H}{\partial \Psi} \end{cases}$$

La solution optimale est la loi de commande suivante :

$$u(t) = -R^{-1}B^T K\,X(t) - R^{-1}B^T q(t)$$

Scanné avec CamScanner

Commande optimale de systèmes à temps continu

- Régulation d'état à horizon fini (perturbation inconnue)

L'équation d'état s'écrit sous cette forme :

$$\dot{X} = AX + Bu$$

Le critère à optimiser est le suivant :

$$J = \frac{1}{2}X_f^T F X_f + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left(X^T QX + u^T Ru\right)dt$$

La commande optimale est obtenue en minimisant l'hamiltonien :

$$H = \frac{1}{2}X^T QX + \frac{1}{2}u^T Ru + \Psi^T \dot{X}$$
$$= \frac{1}{2}X^T QX + \frac{1}{2}u^T Ru + \Psi^T\left(AX + Bu\right)$$

$\Psi(t) = K X(t)$

Vecteur d'état adjoint

Commande optimale de systèmes à temps continu

$$H = \frac{1}{2}X^T QX + \frac{1}{2}u^T Ru + \Psi^T \dot{X} = \frac{1}{2}X^T QX + \frac{1}{2}u^T Ru + \Psi^T(AX + Bu) \qquad \Psi(t) = K X(t)$$

Les conditions d'optimalités sont :

$$\begin{cases} H_u = \dfrac{\partial H}{\partial u} = 0 \\ \dot{\Psi} = -\dfrac{\partial H}{\partial X} = -H_X \end{cases}$$

Ou encore

$$\begin{cases} H_u = Ru + B^T\Psi = 0 \quad (1) \\ \dot{\Psi} = -QX - A^T\Psi \quad (2) \end{cases}$$

La solution optimale est la loi de commande suivante :

$$U(t) = -R^{-1}B^T K X(t) \quad (1)$$

K est la solution de l'équation de RICCATI :

$$\dot{K} + KA + A^T K - KBR^{-1}B^T K + Q = 0 \quad (2)$$

Avec $K(t_f) = K_f = F$

Commande optimale de systèmes à temps continu

- Régulation d'état à horizon infini (perturbation inconnue)

L'équation d'état s'écrit sous cette forme :

$$\dot{X} = AX + Bu$$

Le critère à optimiser est le suivant :

$$J = \frac{1}{2}X_f^T F X_f + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left(X^T QX + u^T Ru\right)dt$$

$t_f \to \infty \Rightarrow X_f \to 0$

J se réécrit comme suit : $J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\left(X^T QX + u^T Ru\right)dt$

Les conditions d'optimalités sont :

$$\begin{cases} H_u = \dfrac{\partial H}{\partial u} = 0 \\ \dot{\Psi} = -\dfrac{\partial H}{\partial X} = -H_X \end{cases}$$

Commande optimale de systèmes à temps continu

La solution optimale est la loi de commande suivante :

$$u(t) = -R^{-1}B^T K X(t)$$

K est la solution de l'équation de RICCATI : $t_f \to \infty \Rightarrow \dot{K} \to 0$

$$KA + A^T K - KBR^{-1}B^T K + Q = 0$$

Le système optimal est alors défini par :

$\dot{X} = A_f X$ $u=0$

pour montrer que le sys est stable, calcul des valeurs propres Af.

on peut pas → Retenir

$\dot{X} = Ax + Bu$ — x — Filtre $\hat{x}$ — observateur

$R^{-1}B^T K\hat{x}$

peut être de Kalman (meilleur filtre pour annuler les bruits) estimation

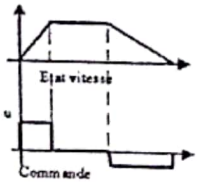
Scanné avec CamScanner

Critère – fonction coût

Critères quadratiques

Minimisation de l'énergie de la commande

On considère l'exemple d'un servomoteur lors d'une phase d'accélération et freinage.



La minimisation de la somme de la commande le long de la trajectoire ne rend pas compte de l'énergie mise en jeu, aussi on minimise le carré de $u(t)$.

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{t1}\left(u_1^2 + u_2^2 \ldots + u_m^2\right)dt$$

Dans le cas d'un système possédant m entrées, On peut désirer minimiser l'énergie de certaines commandes plus que d'autres, le critère s'écrit alors :

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{t1}\left(r_1(t)u_1^2 + r_2(t)u_2^2 \ldots + r_m(t)u_m^2\right)dt$$

soit sous forme matricielle $U = [u_1, u_2, \ldots u_m]^T$

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{t1} U^T . R(t) U(t)\,dt$$

Critère – fonction coût

Critère portant sur l'état final

Lorsqu'on n'est pas certain d'atteindre l'état final souhaité, on cherche à minimiser l'écart entre l'état réellement atteint et l'état à atteindre. Ce critère (connu sous le nom de problème de Mayer) porte sur l'instant final t1 et n'entre donc pas sous l'intégrale.



Exemple : On cherche à minimiser l'écart de distance par rapport au point d'impact souhaité pour un missile stratégique. Le critère a pour expression :

D'une manière plus générale, le coût terminal s'écrit :

$$J = \frac{1}{2}\left(X(t1) - X_c(t1)\right)^T M(t_1)\left(X(t1) - X_c(t1)\right)$$

Critère – fonction coût

Une classe importante de problèmes concerne les critères quadratiques. On peut simultanément chercher à minimiser, l'erreur de trajectoire, l'énergie mise en jeu et l'erreur terminale. Des matrices de pondération privilégient la minimisation de certains termes par rapport aux autres. On groupe le tout en un seul critère :

$$J = \frac{1}{2}\left(X(t1) - X_c(t1)\right)^T M(t1)\left(X(t1) - X_c(t1)\right) + \frac{1}{2}\int_0^{t1}\left[\left(X(t) - X_c(t)\right)^T Q(t)\left[X(t) - X_c(t)\right] + U^T(t) R(t) U(t)\right]dt$$

Qu'on met sous la forme :

$$J = F[X(t1), t1] + \int_0^{t1} L[X(t), U(t), t]\,dt$$

} **Critère à minimiser**

L'évolution des n états du système est soumise à l'équation d'état :

$$\dot{x} = f\left(x(t), u(t), t\right)$$

} **Contrainte**

Problème de minimisation sous contrainte

Déterminer la commande u*(t) qui rend le critère J minimal, compte tenu des conditions initiales et finales et de la contrainte définie par l'équation d'état.

Problème

Equation d'Hamilton - Problème de Commande

Pb: Chercher la fonction u(t) qui minimise le critère:

$$J(u) = L(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x(t), u(t))\,dt$$

avec t_f fixé

compte tenu des contraintes système :

$$(S) : \quad \dot{x} = f(x,u) \quad avec \quad x(0) = x_0$$

Finalement la commande optimale d'un système dynamique (S) exige la condition nécessaire traduite par les équations dites d'HAMILTON suivantes.

Posons l'Hamiltonien H:

$$H(x,u,\psi) = f_0 + \psi^T f$$ $\psi(t)$ adjoint

on doit alors avoir:

les équations d'HAMILTON

$$H_u = 0$$

$$\dot{x} = f(x,u), \qquad x(0) = x_0$$

$$\dot{\psi} = -H_x(x,u,\psi), \quad \psi(t_f) = L_x(x(t_f))$$

Dans la suite, ces résultats de Commande Optimale seront appliqués aux systèmes linéaires continus dans le cas de la Régulation ou de la Poursuite.

Scanné avec CamScanner

Ecole Nationale d'Ingénieurs de Gabès

Département Génie Électrique Automatique

Commande Optimale

Mohamed Naceur ABDELKRIM & Manel CHETOUI

OBJECTIF

Elaborer des stratégies de commande performantes pour des systèmes décrits par leur équation d'état :

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t)$$

Tout en imposant des contraintes d'optimalité

Critère – fonction coût

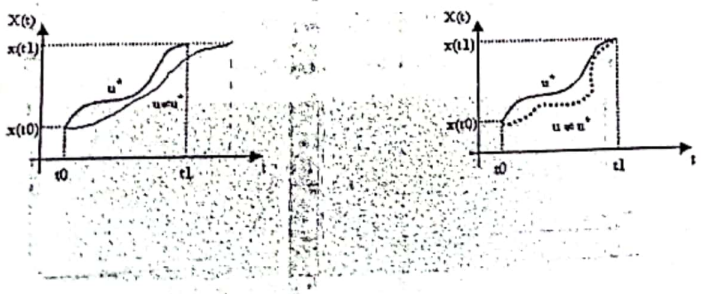
Critères simples

Temps minimum

Il s'agit de déterminer une loi de commande qui permet de passer de l'état x(t0) à l'état x(t1) en temp minimal.

Consommation minimum

Il s'agit de minimiser la consommation d'énergie pour amener un système partant de l'état x(t0) jusqu'à l'état x(t1).

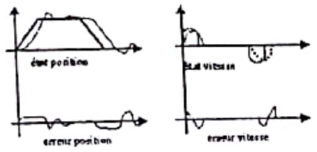


Critère – fonction coût

Critères quadratiques

Poursuite de trajectoire

Exemple : On désire que la vitesse et la position d'un moteur électrique $[\theta, \omega]^T$ suit le plus fidèlement possible une trajectoire de consigne $[\theta c, \omega c]^T$. Minimiser la somme des erreurs de position et de vitesse le long de la trajectoire n'a aucun sens puisque ces signaux peuvent être de grande amplitude et à valeur moyenne nulle. Il est plus judicieux de minimiser le carré de ces erreurs.



Le critère qui minimise ces erreurs a pour expression :

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{tf}[(\theta - \theta_c)^2 + (\omega - \omega_c)^2]dt$$

On adopte avantageusement l'écriture matricielle :

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{tf}\begin{bmatrix}(\theta - \theta_c) & (\omega - \omega_c)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(\theta - \theta_c)\\(\omega - \omega_c)\end{bmatrix}dt$$

Si on veut privilégier la minimisation d'une erreur par rapport à l'autre, on peut introduire des pondérations.

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{tf}[q_1(\theta - \theta_c)^2 + q_2(\omega - \omega_c)^2]dt \qquad q_1 > q_2$$

Ils permettent dans ce cas de favoriser la minimisation de l'erreur de position par rapport à la minimisation de l'erreur de vitesse. Sous forme matricielle :

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{tf}\begin{bmatrix}(\theta - \theta_c) & (\omega - \omega_c)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1 & 0\\0 & q_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(\theta - \theta_c)\\(\omega - \omega_c)\end{bmatrix}dt$$

Dans le cas général d'un problème de poursuite de trajectoire le critère s'écrit :

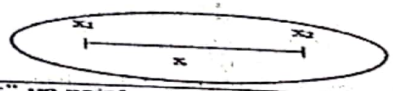
$$J = \frac{1}{2}\int_0^{tf}(X - X_c)^T Q(t)(X - X_c)dt$$

Scanné avec CamScanner

Ensemble et fonctions convexes

Définition Un ensemble C est convexe si :

$\forall x_1, x_2 \in C, \alpha \in [0,1]$, on a: $\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2 \in C$



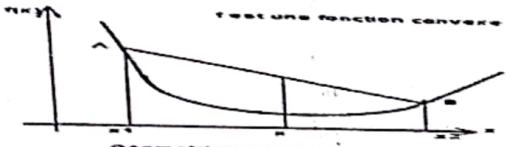
C convexe :" un point entre deux points de C appartient à C"

Fonction Convexe

si $\forall x_1, x_2 \in C, \alpha \in [0,1]$,

alors $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$

Exemple:



Géométriquement tout point de la courbe situé entre A et B a une ordonnée inférieure ou égale à celle du point de même abscisse situé sur [AB].

ou encore Si $x_1 \leq x \leq x_2$ alors $f(x) \leq AB(x)$.

Si (-f) est convexe alors f est dite concave .

Propriétés de Minimum Absolu:

avec la notation :

$$F_{xx}(x) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \quad , \quad F_x(x) = \frac{\partial F}{\partial x}$$

F est convexe Si $F_{xx}(x) \geq 0$ (non négative) et donc la condition du 1er ordre $F_x(x)=0$ est suffisante pour conclure du Minimum Absolu de F(x).

Rappel sur les Matrices de Transition et Solution de l'équation d'état

Soit à trouver l'état x(t) solution de :

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad \text{avec } B = B(t) \text{ et } x(t_0) = x_0 \qquad (1)$$

Le système en régime libre :

$$\dot{X} = AX \quad \text{avec } X(t_0) = X_0$$

a une solution fondamentale :

$$X(t) \quad \text{avec } X(t_0) \neq 0$$

Le système (1) en régime forcé par u(t) admet une solution unique x(t) de la forme :

$$x(t) = X(t)X^{-1}(t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} X(t)X^{-1}(\tau)B(\tau)U(\tau)d\tau$$

Si l'on définit la fonction de transition $\Phi(t,\tau)$ telle que :

$$\Phi(t,\tau) = X(t)X^{-1}(\tau) \text{ avec } \Phi(t,t) = I$$

On a alors :

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

où : $\Phi(t,t_0) = e^{A(t-t_0)}$

on a aussi les propriétés :

$$\begin{cases} \Phi(t,t_0) = \Phi(t_0,t)^{-1} \\ \Phi(t,\tau) = \Phi(t,t_0).\Phi(t_0,\tau) \end{cases}$$

Commandabilité ?

Définition

Un système d'équation d'état $\dot{X} = AX + BU$ ($A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$) est dit complètement commandable sur l'intervalle de temps $[t_0, t_1]$, $t_1 < \infty$ s'il existe une commande $U(t)$ définie sur $[t_0, t_1]$ permettant de faire évoluer le système d'un état initial quelconque $X(t_0)$ à un état désiré quelconque $X(t_1)$.

Théorème

Un système d'équation d'état $\dot{X} = AX + BU$ ($A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$) est complètement commandable à la condition nécessaire et suffisante que la matrice de commandabilité $C(A, B)$ soit de rang n.

Matrice de commandabilité : $C(A,B) = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$

$C(A,B) \in R^{n\times(n.m)}$

Scanné avec CamScanner

Dérivée et Intégrale d'une matrice A :

$A=[a_{ij}(t)]$ alors $\dot{A}=[\dot{a}_{ij}(t)]$ et : $\int A(t)dt=\left[\int [a_{ij}(t)]dt\right]$

on a aussi :

$\frac{d}{dt}(A+B)=\dot{A}+\dot{B}$ et $\frac{d}{dt}(AB)=\dot{A}B+A\dot{B}$

$\frac{d}{dt}(\text{Identité})=0$ donc $\frac{d}{dt}(AA^{-1})=\dot{A}A^{-1}+A\frac{d(A^{-1})}{dt}$

et alors : $\frac{d}{dt}(A^{-1})=-A^{-1}\dot{A}A^{-1}$

Formes quadratiques

Définition et écriture matricielle:

Une forme quadratique est un polynôme homogène de second degré en $x_1,\ldots\ldots,x_n$ tel que :

$$f(x_1,\ldots\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

Exemple : $f(x_1,x_2)=16x_1^2+4x_2^2+30x_1x_2$

qui sous forme matricielle s'écrit:

$x=[x_1 \quad . \quad . \quad x_n]^T$ et $A=[a_{ij}]$ alors $f(x)=x^TAx$

$a_{ij}\neq a_{ji}$ alors $f(x)$ reste inchangée si A est remplacée par la demi –somme telle que : $A=\left[\frac{a_{ij}+a_{ji}}{2}\right]$

Exemple :

$f(x_1,x_2)=16x_1^2+4x_2^2+30x_1x_2$

$A=\begin{bmatrix}16 & 20\\ 10 & 4\end{bmatrix}$ *ou bien* $A=\begin{bmatrix}16 & 17\\ 13 & 4\end{bmatrix}$

de mieux la SYMETRIE $\left(\frac{A+A^T}{2}\right)=\begin{bmatrix}16 & 15\\ 15 & 4\end{bmatrix}$

Signe d'une forme quadratique f(x)
- Positivité d'une matrice -

f(x): est définie positive (ou négative) si:

$\begin{cases} f(x)>0 \quad (\text{ou } <0)\ \forall x \\ f(x)=0 \quad \Leftrightarrow x=0 \end{cases}$

---

f(x) est Semi-définie positive (ou négative) si:

$\begin{cases} f(x)\geq 0 \quad (\text{ou } \leq 0)\ \forall x \\ f(x)=0 \quad \Leftrightarrow x_i \text{ non tous nuls} \end{cases}$

---

f(x) est non définie si son signe dépend de x.

Positivité d'une matrice A:

Une matrice A prend le signe de la forme quadratique f(x) associée et inversement.

Critère de positivité d'une matrice Symétrique M:

soit D_i le déterminant principal d'ordre (i) de matrice M:

- / si tous les $D_i>0$ (respec. $D_i\geq 0$) alors $M>0$ (respec. $M\geq 0$)
- / si tous les $(-1^i.D_i)>0$ (resp. $(-1^i.D_i)\geq 0$) alors $M<0$ (resp. $M\leq 0$)

ou encore :
- *M* positive si toutes les valeurs propres de *M* (qui sont nécessairement réelles) sont strictement positives.
- Il existe une matrice N inversible telle que $M=N^tN$

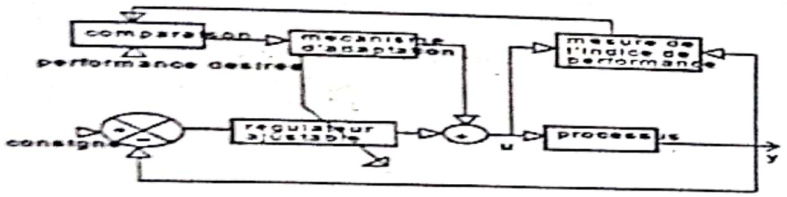
Lemme d'inversion de matrices :

$(A+BCD)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}B(DA^{-1}B+C^{-1})^{-1}DA^{-1}$ (utile surtout en Discret)

Scanné avec CamScanner

4 - Commande adaptative

Cette commande consiste en une technique d'ajustement automatique et en temps réel des régulateurs mis en œuvre pour commander un processus dont les paramètres sont difficiles à déterminer ou qui varient dans le temps. Son mécanisme peut être représenté par le schéma suivant :



Pour la synthèse d'un contrôleur adaptatif on doit souvent imposer les phases suivantes :

- Spécifier les performances désirées
- Définir la structure de commande: poursuite, régulation
- Concevoir le mécanisme d'adaptation (ajustement automatique des régulateurs, maintenance de performance en cas de variations et détection des variations anormales dues à des perturbations structurelles).

RAPPELS MATHEMATIQUES

Dérivées des vecteurs et des matrices

1- Fonction scalaire de variable scalaire $f(x)$:

La dérivée est notée: $\frac{df}{dx} = f_x$ et $\frac{d^2f}{dx^2} = f_{xx}$

2- Fonction scalaire d'un vecteur $f(\underline{x})$:

$$\underline{f}_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \cdot \\ \frac{\partial f}{\partial x_i} \\ \cdot \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} \text{ Gradient et } \underline{f}_{xx} = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right] \text{ Hessien}$$

3- Fonction vectorielle d'un vecteur $\underline{f}(\underline{x})$:

$\underline{F}_x = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]$ i: indice de ligne et j : indice de colonne

4- Fonction vectorielle d'un scalaire $\underline{f}(x)$:

$\underline{F}_x = \left[\frac{\partial f_1}{\partial x} \quad \cdots \quad \frac{\partial f_n}{\partial x}\right]$

5- Fonction matricielle d'un scalaire $F(x) = [f_{ij}(x)]$:

$\underline{F}_x = \left[\frac{df_{ij}(x)}{dx}\right]$

6- Dérivée de la somme et du produit :

Si $\underline{f} = \underline{g} + \underline{h}$ alors $\underline{f}_x = \underline{g}_x + \underline{h}_x$ (Somme)

Si $f(\underline{x}) = \underline{g}^T(\underline{x})\underline{h}(\underline{x})$ alors $\underline{f}_x = G_x\underline{h} + H_x\underline{g}$ (Produit)

Si $f(\underline{x}) = \underline{a}^T\underline{x}$ alors $\underline{f}_x = a$ et $F_{xx} = [0]$

Si $f(\underline{x}) = A\underline{x}$ alors $F_x = A^T$ (A symétrique)

Si $f(\underline{x}) = \underline{x}^T A\underline{x}$ (A symétrique) alors $\underline{f}_x = 2A\underline{x}$ et $F_{xx} = 2A$

Développement en série de Taylor.

Pour une fonction scalaire on écrit:

$$f(x+\Delta) = f(x) + \frac{df}{dx}\Delta + \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dx^2}\Delta^2 + \cdots\cdots$$

Alors pour une fonction vectorielle on aura:

$$\underline{f}(x+\Delta) = \underline{f}(x) + \underline{f}_x^T\Delta + \frac{1}{2}\Delta^T F_{xx}\Delta + \cdots\cdots$$

Dérivées par rapport au temps .

$$\underline{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \\ f_n(t) \end{bmatrix} \text{ alors } \dot{\underline{f}} = \begin{bmatrix} \dot{f}_1 \\ \\ \dot{f}_n \end{bmatrix}$$

Scanné avec CamScanner

Calculer et implanter un Régulateur Convenable

PROCESSUS CONTINUS

Définition :

un processus est continu si les grandeurs physiques qui le caractérisent ont une évolution continue dans le temps avec un modèle généralement de la forme différentielle et/ou algébrique suivante:

$$\dot{X} = F(X,U,t,v)$$
$$Y = H(X,U,t,v)$$

Dans le cas d'un système linéaire stationnaire, ce modèle sera de la forme:

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU + V \\ Y = CX + DU \end{cases}$$

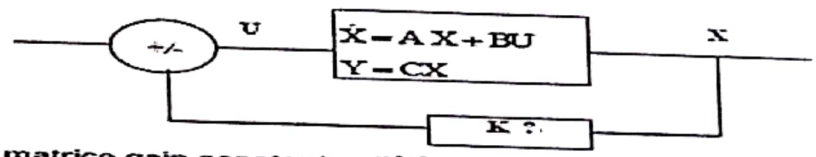
X: vecteur état du système $\in R^n$
U: vecteur entrée ou commande $\in R^m$
Y: vecteur sortie $\in R^p$
V: vecteur perturbation $\in R^n$
A: matrice caractéristique (n,n)
B: matrice de commande (n,m)
C: matrice de sortie (p,n)
D: matrice de transmission directe(p,r)

Un aperçu sur quelques Commandes Classiques « non optimales »

1- Commande po: placement de pôles

Il s'agit d'imposer au système une certaine dynamique en lui imposant ses pôles par le biais d'un simple retour d'état cad. sans utiliser de régulateur pouvant introduire des nouveaux modes .

La commande est alors prise sous la forme : U=K.X + E



K : matrice gain constante ,d'éléments k_{ij} à déterminer ?
E : vecteur des consignes

$$\dot{X} = AX + BU$$
$$\dot{X} = AX + B(e - KX)$$
$$\dot{X} = (A - BK)X + Be$$

2- Commande non interactive

Cette commande consiste , grâce à un découplage spécifique et dans la mesure du possible, de limiter l'effet d'une entrée à une seule sortie.

Le système sera comme un ensemble de systèmes monovariables évoluant en parallèle et les commandes seront dans ce cas non-interactives ce qui nécessite un nombre d'entrées égal au nombre de sorties.

Ce découplage peut être fait :

- par un régulateur R(p) en cascade avec la matrice de transfert

$M(p)=C(pI-A)^{-1}B$ du système permettant de le diagonaliser en ayant :

$D(p)=M(p)\,R(p)$ diagonale

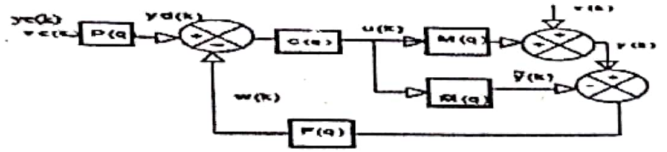
- par retour d'état

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \text{ avec } U = KX + LV \\ Y = CX \end{cases}$$

de façon que la sortie y_i ne dépende que de l'entrée v_i. Il suffit alors de déterminer K et L telles que la matrice de transfert en boucle fermée Mfermée(p) soit diagonale.

3 - Commande à modèle interne

Cette méthode de commande est très fréquente du fait sa simplicité, seulement qu'elle exige la stabilité du système, sinon il faut procéder à un bouclage stabilisant préalable.



v(k) : perturbation sur la sortie
yc(k) : Consigne ou référence à l'instant k
$\tilde{M}(q)$: Modèle de comportement
C(q) : Contrôleur en vue d'une commande en boucle ouverte
F(q) : Filtre de régulation pour le rejet de la perturbation v(k)
P(q) : Générateur de trajectoire désirée yd(k) en poursuite de yc(k)

Scanné avec CamScanner

Ecole Nationale d'Ingénieurs de Gabès
Département Génie Électrique Automatique

Commande Optimale

Mohamed Naceur ABDELKRIM
Manel CHETOUI
Mohamed AOUN
Haifa THABET

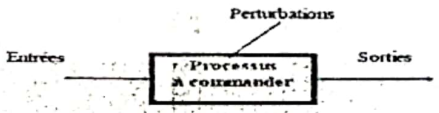
MACS
Laboratoire de recherche

Introduction à la commande des processus

Chapitre 1

Introduction à la commande des processus

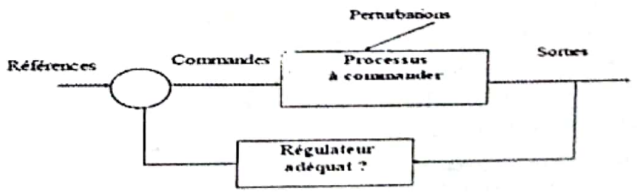
Dans un processus , on peut distinguer les entrées , les sorties et les perturbations (figure ci-dessous)



l'objectif fondamental de l'ingénieur est la *Commande* des processus ?.

Pour réaliser cet objectif de *Commande* :

Il faut donc :
Déterminer la commande voulue pour un objectif choisi et fixé . Celui-ci consiste souvent à satisfaire un certain comportement dynamique et / ou statique par des méthodes ou formes plus ou moins différentes et adaptées aux processus étudiés.



Alors

Scanné avec CamScanner